

Функция Грина пятиточечной дискретизации двумерного конечнозонного оператора Шрёдингера: случай четырёх особых точек на спектральной кривой

Б. О. Василевский *

6 сентября 2013

Аннотация

Рассмотрим пятиточечную эллиптическую дискретизацию двумерного конечнозонного при одной энергии оператора Шрёдингера. Мы строим для него функцию Грина в виде явной формулы в терминах интеграла по специальному контуру на спектральной кривой от дифференциала, построенного по волновой функции и двойственной к ней. Описанная формула параметризована точкой на поверхности и позволяет почти при каждом значении параметра построить функцию Грина с известной асимптотикой на бесконечности.

1 Введение

В настоящее время одной из активно исследуемых задач математической физики является построение интегрируемых дискретных аналогов непрерывных интегрируемых систем. Большой прорыв в развитии последних был сделан 1960-х годах с применением теории солитонов.

В непрерывном случае хотелось бы упомянуть подходы С. В. Манакова и Б. А. Дубровина, И. М. Кричевера, С. П. Новикова. Манаков в своей работе [1] показал, что для двумерных систем правильным обобщением пары Лакса является L, A, B -тройка. Дубровин, Кричевер и Новиков [2] показали интегрируемость двумерного стационарного конечнозонного оператора Шрёдингера при фиксированной энергии используя конечнозонный подход. Следующий важный шаг был произведен в работах А. П. Веселова и С. П. Новикова [3], в которых авторы нашли условие на конечнозонные спектральные данные, соответствующие нулевому магнитному полю. На операторах с нулевым магнитным полем возникает иерархия Веселова-Новикова, порождающая бесконечную алгебру симметрий для задачи рассеяния.

В дискретном случае отдельный интерес (не только чисто теоретический) вызывала задача рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера при одной энергии. Интегрируемая (построено обратное спектральное преобразование в периодическом случае) гиперболическая дискретизация была найдена И. М. Кричевером [4]. Далее, в статье

*МГУ им. М. В. Ломоносова, email: vasillevskiy.boris@gmail.com

А. Доливы, П. Гриневича, М. Нишпровски и П. Сантини [5] была получена эллиптическая дискретизация из специальной редукции гиперболической дискретизации. Эта редукция в терминах спектральных данных оказалась очень похожа на редукцию в работах Веселова и Новикова [3]. В частности, на спектральной кривой требуется наличие голоморфной инволюции с двумя неподвижными точками.

Случаи двух и нуля неподвижных точек у голоморфной инволюции на римановой поверхности являются наиболее интересными, согласно Д. Фэю [7]. Как показали Кричевер и Грушевский [6], конечнозонные решения, построенные в [5], являются решениями специального вида. Решения общего положения отвечают спектральным кривым, у которых инволюция не имеет неподвижных точек. Но вслед за [5] мы будем рассматривать инволюцию именно с двумя неподвижными точками.

Наиболее общие потенциалы отвечают римановой поверхности, на которой особенности находятся в четырёх сериях выделенных точек. Однако наиболее интересен случай, когда все точки серий совпадают, или, что эквивалентно, имеется ровно 4 особых точки. Мы остановимся на нем.

Приведем сведения из работы [5], необходимые для построения пятиточечного эллиптического оператора и его волновой функции. При этом мы сразу будем рассматривать случай только 4 особых точек. Главная цель данной статьи — явная формула для функции Грина этого оператора.

Будем считать, что у нас имеется:

1. Компактная, регулярная риманова поверхность рода g .
2. Фиксированная точка R_1 на Γ — точка нормировки для волновой функции $\Psi(\gamma, m, n)$.
3. g точек $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ на Γ — дивизор полюсов волновой функции.
4. Четыре выделенных точки P^+, P^-, Q^+, Q^- .

По теореме Римана-Роха, для данных общего положения и для любых целых m, n существует единственная функция $\Psi(\gamma, m, n)$, $\gamma \in \Gamma$, со следующими свойствами:

1. $\Psi(\gamma, m, n)$ является мероморфной функцией от γ на Γ .
2. Ψ имеет полюса не более первого порядка в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_g$, полюс не более m -го порядка в точке P^+ , полюс не более n -го порядка в точке Q^+ и не имеет никаких других особенностей.
3. Ψ имеет нуль по крайней мере m -го порядка в точке P^- и нуль по крайней мере n -го порядка в точке Q^- .
4. $\Psi(R_1, m, n) = 1$.

Из теоремы Римана-Роха также следует справедливость равенства

$$\Psi(\gamma, m+1, n+1) + \alpha_1(m, n)\Psi(\gamma, m+1, n) + \alpha_2(m, n)\Psi(\gamma, m, n+1) + \alpha_3\Psi(\gamma, m, n) = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты $\alpha_j(m, n)$ задаются формулами

$$\begin{aligned}\alpha_1(m, n) &= -\lim_{\gamma \rightarrow P^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n+1)}{\Psi(\gamma, m+1, n)}, \\ \alpha_2(m, n) &= -\lim_{\gamma \rightarrow Q^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n+1)}{\Psi(\gamma, m, n+1)}, \\ \alpha_3(m, n) &= -1 - \alpha_1(m, n) - \alpha_2(m, n).\end{aligned}$$

Полученный гиперболический дискретный оператор Шредингера был построен Кричевером в [4].

Пусть теперь на Γ определена голоморфная инволюция σ ровно с двумя неподвижными точками $R_+ = R_1$, R_- и следующими свойствами:

1. На Γ существует мероморфный дифференциал Ω с двумя полюсами первого порядка в R_+ , R_- и $2g$ нулями в $\gamma_1, \dots, \gamma_g, \sigma\gamma_1, \dots, \sigma\gamma_g$.
2. $\sigma P^+ = P^-$, $\sigma Q^+ = Q^-$.

Лемма 16 [5] гласит, что в таком случае

$$\Psi(R_-, m, n) = (-1)^{m+n}, \quad \alpha_1(m, n) + \alpha_2(m, n) = 0, \quad \alpha_3(m, n) = -1, \quad (2)$$

а волновая функция Ψ удовлетворяет 4-точечному уравнению

$$\Psi(m+1, n+1) - \Psi(m, n) = if(m, n)(\Psi(m+1, n) - \Psi(m, n+1)), \quad (3)$$

$$f(m, n) = i\alpha_1(m, n) = -i\alpha_2(m, n). \quad (4)$$

Примечательно, что из существования такой инволюции с формой вытекает

$$\begin{aligned}& \frac{1}{f(m, n)}(\Psi(m+1, n+1) - \Psi(m, n)) + \\ & f(m, n-1)(\Psi(m+1, n-1) - \Psi(m, n)) + \\ & f(m-1, n)(\Psi(m-1, n+1) - \Psi(m, n)) + \\ & \frac{1}{f(m-1, n-1)}(\Psi(m-1, n-1) - \Psi(m, n)) = 0.\end{aligned} \quad (5)$$

Это следует как из теоремы Римана-Роха, так и напрямую из Предложения 2 [5]. После перехода на чётную подрешётку

$$\begin{aligned}m &= \mu - \nu, \quad n = \mu + \nu, \quad \Psi_{\mu, \nu} = \Psi(m, n) = \Psi(\mu - \nu, \mu + \nu), \\ a_{\mu, \nu} &= \frac{1}{f(m, n)}, \quad a_{\mu-1, \nu} = \frac{1}{f(m-1, n-1)}, \\ b_{\mu, \nu} &= f(m-1, n), \quad b_{\mu, \nu-1} = f(m, n-1), \\ c_{\mu, \nu} &= a_{\mu, \nu} + a_{\mu-1, \nu} + b_{\mu, \nu} + b_{\mu, \nu-1},\end{aligned}$$

пятиточечный оператор запишется в следующем виде

$$(L\Phi)_{\mu, \nu} = a_{\mu, \nu}\Phi_{\mu+1, \nu} + a_{\mu-1, \nu}\Phi_{\mu-1, \nu} + b_{\mu, \nu}\Phi_{\mu, \nu+1} + b_{\mu, \nu-1}\Phi_{\mu, \nu-1} - c_{\mu, \nu}\Phi_{\mu, \nu} \quad (6)$$

Будем считать нормировку $\Omega(\gamma)$ такой, что его вычеты в точках R_+ , R_- равны соответственно $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$.

Двойственная волновая функция определяется как $\Psi^+(\gamma, m, n) = \Psi(\sigma\gamma, m, n)$. При ее участии строится дифференциал

$$\tilde{\Omega}(\gamma, m, n, \tilde{m}, \tilde{n}) = \Psi(\gamma, m, n)\Psi^+(\gamma, \tilde{m}, \tilde{n})\Omega.$$

Такое обозначение отличается от [5] заменой $\mu \leftrightarrow \tilde{\mu}$ и $\nu \leftrightarrow \tilde{\nu}$, что позволяет избежать излишнего загромождения формул. При помощи $\tilde{\Omega}$ мы будем строить функцию Грина для оператора L .

Мы также потребуем существование на Γ антиголоморфной инволюции τ , такой что

1. τ и σ коммутируют.
2. $\tau R_+ = R_-$.
3. Точки P^+ , P^- , Q^+ , Q^- являются неподвижными для τ .
4. Дивизор $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ инвариантен относительно τ .

В этом случае по лемме 17 [5]

$$f(m, n) \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

$$\Psi(\tau\gamma, m, n) = (-1)^{m+n} \overline{\Psi(\gamma, m, n)}. \quad (8)$$

Пример 1. Рассмотрим случай сферы Римана. Пусть $P^\pm = \pm 1$, $Q^\pm = \pm i$, $R_+ = \infty$, $R_- = 0$. Волновая функция запишется как

$$\Psi(z, m, n) = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^m \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^n.$$

Отсюда видно, что $f(m, n) \equiv 1$, то есть Ψ удовлетворяет гиперболическому уравнению

$$\varphi_{m+1, n+1} - \varphi_{mn} = i(\varphi_{m+1, n} - \varphi_{m, n+1}).$$

Определим инволюции и дифференциал Ω :

$$\sigma z = -z, \quad \Omega = -\frac{dz}{2z}, \quad \tau z = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Из существования σ , Ω немедленно следует, что Ψ является также решением эллиптического уравнения

$$\varphi_{m+1, n+1} + \varphi_{m+1, n-1} + \varphi_{m-1, n+1} + \varphi_{m-1, n-1} - 4\varphi_{mn} = 0.$$

Заметим, что на Γ есть только один вещественный овал (множество точек, инвариантных относительно τ) $|z| = 1$, на нём лежат все наши выделенные точки P^\pm , Q^\pm .

2 Рост волновой функции

Вопрос о том, как ведет себя $|\Psi(\gamma, m, n)|$ при фиксированном γ , очень важен для оценки роста функции Грина, построенной в данной работе. Для формулировки и доказательства теоремы нам потребуются некоторые понятия теории римановых поверхностей.

Выберем на Γ канонический базис циклов $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ и базис голоморфных дифференциалов $\omega_1, \dots, \omega_g$, нормированный следующим образом:

$$\oint_{a_k} \omega_j = \delta_{jk}.$$

Нам понадобится тета-функция Римана поверхности Γ , которая определяется рядом

$$\theta(z|B) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i \langle BN, N \rangle + 2\pi i \langle N, z \rangle),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение, а B — матрица b -периодов голоморфных дифференциалов

$$\oint_{b_k} \omega_j = B_{jk}.$$

Зададим отображение Абеля как

$$\vec{A}(\gamma) = \left(\int_{R_+}^{\gamma} \omega_1, \dots, \int_{R_+}^{\gamma} \omega_g \right). \quad (9)$$

Напомним, что это корректно определенное отображение $\Gamma \xrightarrow{A} J(\Gamma)$, где $J(\Gamma)$ — многообразие Якоби, $J(\Gamma) = \mathbb{C}^g / \{M + BN\}$ для $M, N \in \mathbb{Z}^g$.

Для двух различных точек P, Q римановой поверхности существует мероморфный дифференциал $\Omega(P, Q)$ с полюсами первого порядка в P, Q и вычетами -1 и 1 соответственно, не имеющий других особенностей. Мы добавим условие равенства нулю по всем a -циклам, благодаря которому $\Omega(P, Q)$ определяется однозначно. Он противоположен соответствующему нормированному абелеву дифференциалу третьего рода.

Для волновой функции Ψ есть формула в явном виде (5.2 [5]), верная при любых целых m, n :

$$\begin{aligned} \Psi(\gamma, m, n) = & \exp \left(m \int_{R_+}^{\gamma} \Omega(P^+, P^-) + n \int_{R_+}^{\gamma} \Omega(Q^+, Q^-) \right) \times \\ & \times \frac{\theta \left(\vec{A}(\gamma) + m \vec{\Delta}_P + n \vec{\Delta}_Q - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)}{\theta \left(\vec{A}(\gamma) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)} \times \frac{\theta \left(\vec{A}(R_+) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)}{\theta \left(\vec{A}(R_+) + m \vec{\Delta}_P + n \vec{\Delta}_Q - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\vec{\Delta}_P = \vec{A}(P^-) - \vec{A}(P^+)$, $\vec{\Delta}_Q = \vec{A}(Q^-) - \vec{A}(Q^+)$. Пути во всех интегралах берутся одинаковыми. Проверим, что (10) задаёт однозначную на Γ функцию. Если путь до фиксированного γ изменяется на некоторый цикл, гомологичный $\sum_{j=1}^g (N_j a_j + M_j b_j)$, $\vec{N}, \vec{M} \in \mathbb{Z}^g$, то отношение θ -функций умножится на $t = \exp(-2\pi i \langle \vec{M}, m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q \rangle)$. Из теории римановых поверхностей нам известно, что

$$\oint_{b_k} \Omega(P^+, P^-) = 2\pi i \int_{P^+}^{P^-} \omega_k, \quad \oint_{b_k} \Omega(Q^+, Q^-) = 2\pi i \int_{Q^+}^{Q^-} \omega_k, \quad (11)$$

а следовательно, экспонента умножится на t^{-1} .

Пусть Γ является M -кривой, то есть инволюция τ имеет $g+1$ неподвижный овал a_1, a_2, \dots, a_g, c .

Теорема 1. Пусть Γ является M -кривой, выделенные точки P^\pm, Q^\pm попадают на овал c , на остальные овалы попадает по одной точке γ -дивизора: $\gamma_j \in a_j, j = 1, \dots, g$. Тогда канонический базис циклов и пути интегрирования на Γ можно выбрать таким образом, что для любого фиксированного $\gamma \in \Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$ выполняется неравенство при всех целых m, n :

$$|\Psi(\gamma, m, n)| \leq R(\gamma) \left| \exp \left(m \int_{R_+}^{\gamma} \Omega(P^+, P^-) + n \int_{R_+}^{\gamma} \Omega(Q^+, Q^-) \right) \right|, \quad (12)$$

где $R : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая на $\Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$ функция.

Другими словами, почти всех $\gamma \in \Gamma$ рост абсолютной величины $\Psi(m, n)$ зависит только от $\Omega(P^+, P^-), \Omega(Q^+, Q^-)$.

Доказательство. Благодаря расположению γ_j все нули $\Psi(\gamma, m, n)$ при любых m, n располагаются только на неподвижных овалах a_1, \dots, a_g, c . Действительно, на каждом из a_j ($j = 1, \dots, g$), функция $\Psi(\gamma, m, n)$ вещественная или чисто мнимая (8) и имеет полюс первого порядка. Тогда на a_j найдется и нуль по крайней мере первого порядка. Степень дивизора $(mP^- - mP^+ + nQ^- - nQ^+ - \gamma_1 - \dots - \gamma_g)$ равна $(-g)$ и по построению у $\Psi(\gamma, m, n)$ нет полюсов вне точек этого дивизора. Следовательно, все нули на a_j имеют первый порядок и более на Γ нулей у $\Psi(\gamma, m, n)$ нет.

Рассмотрим явную формулу (10). Пусть $\gamma \in \Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$, тогда ни одна из θ -функций не обращается в нуль. Мы докажем существование гладких $R_{\min}(\gamma) > 0$ и $R_{\max}(\gamma) > 0$, таких что для любых m, n выполняется

$$R_{\min}(\gamma) \leq \left| \theta \left(\vec{A}(\gamma) + m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right) \right| \leq R_{\max}(\gamma).$$

Искомая оценка будет выполняться при

$$R(\gamma) = \frac{R_{\max}(\gamma)}{R_{\min}(R_+)} \frac{\left| \theta \left(\vec{A}(R_+) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right) \right|}{\left| \theta \left(\vec{A}(\gamma) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right) \right|}.$$

Возьмем в качестве a -циклов канонического базиса неподвижные овалы τ с точками γ -дивизора a_1, \dots, a_g . Благодаря такому выбору мы получаем целый ряд свойств.

Для каждого $j = 1, \dots, g$ дифференциал $\overline{\tau\omega_j}$ является голоморфным и имеет ту же нормировку, что и ω_j . Следовательно, $\tau\omega_j = \overline{\omega_j}$ и ω_j принимает вещественные значения на неподвижных овалах τ .

Вещественной частью многообразия Якоби $\text{Re } J(\Gamma)$ назовем подмножество $J(\Gamma)$ классов эквивалентности с вещественными представителями $\vec{x} + B\vec{M}$, где $\vec{x} \in \mathbb{R}^g$, $\vec{M} \in \mathbb{Z}^g$.

Вспомним, что при изменении m, n аргументы θ -функций изменяются на $\vec{\Delta}_P = \vec{A}(P^-) - \vec{A}(P^+)$, $\vec{\Delta}_Q = \vec{A}(Q^-) - \vec{A}(Q^+)$ соответственно. Тогда из вещественности ω_j на неподвижных овалах и определения

$$(\vec{\Delta}_P)_j = \int_{P^+}^{P^-} \omega_j, \quad (\vec{\Delta}_Q)_j = \int_{Q^+}^{Q^-} \omega_j$$

следует $\vec{\Delta}_P \in \text{Re } J(\Gamma)$, $\vec{\Delta}_Q \in \text{Re } J(\Gamma)$, так как от вещественного вектора они могут отличаться только на периоды многообразия Якоби.

Фиксируем $\lambda \in \Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$ и рассмотрим множество всех значений аргументов рассматриваемой θ -функции при различных m, n

$$V(\lambda) = \left\{ \vec{A}(\lambda) + m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Докажем, что замыкание $V(\lambda)$ в $J(\Gamma)$ не содержит нулей θ -функции. Пусть такой нуль $z \in J(\Gamma)$ все-таки нашелся. Тогда разность $z - \left(\vec{A}(\lambda) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)$ сколь угодно приближается суммой $m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q \in \text{Re } J(\Gamma)$ и по замкнутости сама принадлежит $\text{Re } J(\Gamma)$. Следовательно, найдется такая $\lambda_0 \in \Gamma$, $\tau\lambda_0 = \lambda_0$, что на $J(\Gamma)$ выполняется равенство $z = \vec{A}(\lambda_0) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K}$, откуда следует $\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\lambda) \in \text{Re } J(\Gamma)$. Воспользуемся теперь возможностью выбрать пути интегрирования и добьемся вещественности последней разности: $\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\lambda) \in \mathbb{R}^g$. Из $\tau\omega_j = \overline{\omega_j}$ вытекает

$$\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\tau\lambda) = \overline{\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\lambda)},$$

а из вещественности правой части $\vec{A}(\lambda) = \vec{A}(\tau\lambda)$. Поскольку $\tau\lambda \neq \lambda$, такое может быть только на сфере $g = 0$, где доказываемая оценка тривиальна.

Из отсутствия нулей в замыкании $V(\lambda) \subset J(\Gamma)$ и компактности последнего следует существование искомых $R_{\min}(\lambda)$, $R_{\max}(\lambda)$ для всех $\lambda \notin (a_1 \cup \dots \cup a_h \cup c)$, этим и завершается доказательство. \blacksquare

Замечание 1. Выбор путей интегрирования в точности соответствует случаю $\vec{\Delta}_P \in \mathbb{R}^g$, $\vec{\Delta}_Q \in \mathbb{R}^g$, поэтому по (11) интегралы от $\Omega(P^+, P^-)$, $\Omega(Q^+, Q^-)$ по любому циклу являются вещественными.

Замечание 2. По всей видимости, оценка (12) выполняется почти всюду и в более общем случае, когда Γ не является М-кривой. Но строгое доказательство требует более серьезной техники. Эта задача — тема для дальнейших исследований.

3 Квазиимпульсы

Дифференциалы квазиимпульсов dp_m, dp_n определяются по аналогии с [9]. А именно, это мероморфные дифференциалы третьего рода; dp_m имеет вычеты $i, -i$ в точках P^+, P^- соответственно, dp_n — такие же вычеты в точках Q^+, Q^- соответственно. Дифференциалы квазиимпульсов однозначно определяются условием вещественности интегралов по всем контурам. Сами квазиимпульсы определяются как

$$p_m(\gamma) = \int_{R_+}^{\gamma} dp_m, \quad p_n(\gamma) = \int_{R_+}^{\gamma} dp_n \quad (13)$$

и являются многозначными на Γ , однако их мнимые части $\text{Im } p_m(\gamma), \text{Im } p_n(\gamma)$ уже являются однозначными на Γ .

Из замечания 1 и единственности дифференциалов квазиимпульсов следует, что при выборе канонического базиса циклов и путей интегрирования как в теореме 1 выполняется $\Omega(P^+, P^-) = -idp_m, \Omega(Q^+, Q^-) = -idp_n$. Поэтому оценка (12) может быть переписана в терминах квазиимпульсов:

$$|\Psi(\gamma, m, n)| \leq R(\gamma) e^{m \text{Im } p_m(\gamma)} e^{n \text{Im } p_n(\gamma)}. \quad (14)$$

Отметим, что поскольку и левая часть, и квазиимпульсы уже не зависят от выбора базиса или путей интегралов, то функция $R(\gamma)$ также не зависит от них.

Оценка абсолютной величины двойственной волновой функции получается заменой γ на $\sigma\gamma$

$$|\Psi^+(\gamma, m, n)| \leq R(\sigma\gamma) e^{m \text{Im } p_m(\sigma\gamma)} e^{n \text{Im } p_n(\sigma\gamma)}.$$

Дифференциал $-dp_m(\sigma\gamma)$ имеет полюса в P^+, P^- с вычетами соответственно $+i, -i$, а также интеграл от него по любому контуру является вещественным. Следовательно, $dp_m(\sigma\gamma) = -dp_m$. Рассуждая аналогично, получим $dp_n(\sigma\gamma) = -dp_n$. Поэтому последнее неравенство можно переписать в виде

$$|\Psi^+(\gamma, m, n)| \leq R(\sigma\gamma) e^{-m \text{Im } p_m(\gamma)} e^{-n \text{Im } p_n(\gamma)}. \quad (15)$$

Для контроля роста Ψ мы будем рассматривать множества вида

$$C_\lambda = \{\gamma : \text{Im } p_n(\gamma) = \text{Im } p_n(\lambda)\}, \quad \lambda \in \Gamma.$$

Такого рода контуры возникли ещё в работе Кричевера и Новикова [8].

Пример 2. Продолжим рассмотрение случая $g = 0$. В качестве дифференциалов квазиимпульсов подходят

$$dp_m = \frac{idz}{z-1} - \frac{idz}{z+1}, \quad dp_n = \frac{idz}{z-i} - \frac{idz}{z+i}.$$

Действительно, мнимые части квазиимпульсов получаются однозначными:

$$p_m = i \ln \left(\frac{z-1}{z+1} \right), \quad p_n = i \ln \left(\frac{z-i}{z+i} \right),$$

$$\operatorname{Im} p_m = \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right|, \quad \operatorname{Im} p_n = \ln \left| \frac{z-i}{z+i} \right|.$$

На сфере Римана контуры $\operatorname{Im} p_m = \text{const}$, $\operatorname{Im} p_n = \text{const}$ представляют собой окружности с центрами в P^\pm , Q^\pm соответственно. Заметим, что точки P^\pm , R_\pm лежат на одном контуре $\operatorname{Im} p_n = 0$.

Оценки (14) и (15) в случае сферы обращаются в равенства при $R \equiv 1$.

Перечислим важные для нас в будущем свойства контура C_λ . Для начала заметим, что при $\lambda = Q^\pm$ он вырождается в точку.

Лемма 1. *Для всех $\lambda \in \Gamma \setminus \{Q^+, Q^-\}$ верны следующие свойства.*

- 1) C_λ является объединением некоторого количества кусочно-гладких замкнутых кривых,
- 2) C_λ гомологичен точке,
- 3) точки R_+ , R_- лежат по одну сторону относительно C_λ , точки Q^+ , Q^- — по разные.

Доказательство. 1) Дифференциал dp_n имеет $2g$ нулей на Γ с учетом кратностей. Если C_λ через них не проходит, то по теореме о неявной функции в окрестности каждой своей точки C_λ представляет собой гладкую неособую кривую. При прохождении через нули кривая может потерять гладкость, но она остается непрерывной. Из компактности Γ следует замкнутость каждого пути.

2) Гомологичность точке C_λ следует из того, что он является границей подмногообразия с краем $\{\gamma : \operatorname{Im} p_n(\gamma) \leq \operatorname{Im} p_n(\lambda)\}$, гладкого почти для всех λ .

3) Утверждение о Q^+ , Q^- следует из $\operatorname{Im} p_n(Q^+) = -\infty$, $\operatorname{Im} p_n(Q^-) = +\infty$. В силу предыдущих пунктов достаточно показать, что $\operatorname{Im} p_n(R_-) = \operatorname{Im} p_n(R_+) = 0$.

Для начала заметим, что дифференциал $-\tau(dp_n)$ является мероморфным, имеет простые полюса в Q^+ , Q^- с вычетами i и $-i$ соответственно, а также интеграл от него по любому контуру является вещественным. Тогда по единственности $\tau(dp_n) = -\overline{dp_n}$. Используя $\tau R_+ = R_-$ и вещественность интегралов по контурам, получаем

$$\operatorname{Im} \int_{R_+}^{R_-} dp_n = -\operatorname{Im} \int_{R_+}^{R_-} \tau(\overline{dp_n}) = -\operatorname{Im} \int_{R_-}^{R_+} \overline{dp_n} = \operatorname{Im} \int_{R_+}^{R_-} \overline{dp_n} \Rightarrow \operatorname{Im} \int_{R_+}^{R_-} dp_n = 0,$$

что и требовалось. ■

4 Функция Грина оператора L

Нас интересует такая функция $G(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$, что для любого фиксированного $\lambda \in \Gamma$

$$LG = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = \tilde{\mu} \text{ и } \nu = \tilde{\nu}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (16)$$

где

$$LG = a_{\mu,\nu}G(\lambda, \mu + 1, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) + a_{\mu-1,\nu}G(\lambda, \mu - 1, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) + \\ b_{\mu,\nu}G(\lambda, \mu, \nu + 1, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) + b_{\mu,\nu-1}G(\lambda, \mu, \nu - 1, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) - c_{\mu,\nu}G(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}). \quad (17)$$

Забегая вперед, скажем, что почти при всех λ для найденной функции выполнено

$$|G(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})| \leq R_1(\lambda) e^{(\mu-\tilde{\mu}) \operatorname{Im} p_\mu(\lambda)} e^{(\nu-\tilde{\nu}) \operatorname{Im} p_\nu(\lambda)}, \quad (18)$$

где

$$p_\mu = p_n + p_m, \quad p_\nu = p_n - p_m \quad (19)$$

и $R_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая в точках выполнения неравенства. Другими словами, почти всюду рост абсолютной величины G такой же, как и Ψ .

Предположение П. Г. Гриневича заключалось в том, что функцию Грина можно найти примерно в таком же виде, что и в непрерывном случае (см. [10]). Здесь мы покажем справедливость предположения. Искомую G будет строить в два шага: сначала построим ненормализованную функцию G_0 , удовлетворяющую (16), а затем подправим её, чтобы обеспечить нужный рост (18).

4.1 Ненормализованная функция Грина по С-контуре

Прежде чем формулировать основную теорему раздела, докажем несколько лемм.

Лемма 2. *При $\mu - \nu = \tilde{\mu} - \tilde{\nu}$ выполняется*

$$\operatorname{res}_{P^+} a_{\mu,\nu} \Psi_{\mu+1,\nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma) = - \operatorname{res}_{P^+} b_{\mu,\nu-1} \Psi_{\mu,\nu-1} \Psi_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma). \quad (20)$$

Доказательство. Посчитаем порядок полюса в P^+ у левого дифференциала. Функция $\Psi_{\mu+1,\nu}(\gamma)$ имеет в P^+ полюс не более чем $\mu - \nu + 1$ порядка, $\Psi_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}^+(\gamma)$ имеет в P^+ нуль не менее чем $\tilde{\mu} - \tilde{\nu}$ порядка; в сочетании с условием леммы это означает, что левый дифференциал имеет в P^+ полюс не более чем 1 порядка. Аналогично получаем, что и у правого дифференциала в P^+ полюс не более чем 1 порядка. Следовательно, при вычислении вычетов мы можем использовать $\operatorname{res}_{\gamma_0} \omega(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \gamma_0} (\gamma - \gamma_0) \omega(\gamma)$. Перейдём к обозначениям $m = \mu - \nu$, $n = \mu + \nu$

$$a_{\mu,\nu} = \frac{1}{f(m, n)} = i \lim_{\gamma \rightarrow P^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n)}{\Psi(\gamma, m+1, n+1)},$$

$$b_{\mu,\nu-1} = f(m, n-1) = -i \lim_{\gamma \rightarrow P^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n)}{\Psi(\gamma, m+1, n-1)}.$$

По условию $\tilde{m} = m$, тогда левая часть (20) равна

$$\lim_{\gamma \rightarrow P^+} (\gamma - P^+) i \frac{\Psi(\gamma, m+1, n)}{\Psi(\gamma, m+1, n+1)} \Psi(\gamma, m+1, n+1) \Psi^+(\gamma, m, \tilde{n}) \Omega(\gamma).$$

Расписав таким же образом правую часть, получим после сокращений утверждение леммы. \blacksquare

Напомним, что через $\tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ мы обозначили дифференциал $\Psi_{\mu,\nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma)$.

Лемма 3. Для любых μ, ν выполняется

$$\operatorname{res}_{Q^+} a_{\mu,\nu} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu + 1, \nu, \mu, \nu) = i \quad (21)$$

Доказательство. Это утверждение возникло ещё в 5.2 [5]. Поскольку $a_{\mu,\nu} = 1/f(m, n)$, то в обозначениях m, n оно выглядит как

$$\operatorname{res}_{Q^+} \Psi(m + 1, n + 1) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma) = if(m, n).$$

Для доказательства рассмотрим 4-точечное равенство (3), домножим его на $\Psi^+(m, n) \Omega(\gamma)$ и возьмём вычеты в точке Q^+

$$\operatorname{res}_{Q^+} (\Psi(m + 1, n + 1) - \Psi(m, n)) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma) = if(m, n) \operatorname{res}_{Q^+} (\Psi(m + 1, n) - \Psi(m, n + 1)) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma),$$

$$\operatorname{res}_{Q^+} \Psi(m + 1, n + 1) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma) = -if(m, n) \operatorname{res}_{Q^+} \Psi(m, n + 1) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma).$$

Дифференциал $\Psi(m, n + 1) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma)$ имеет полюса в точках R_+, R_-, Q^+ . По (2), оба вычета в R_+, R_- равны $\frac{1}{2}$, поэтому $\operatorname{res}_{Q^+} \Psi(m, n + 1) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma) = -1$. Подставив этот результат в формулу выше, получим утверждение леммы. ■

Определение 1. Объединение α некоторого количества замкнутых кусочно-гладких кривых на Γ будем называть **C-контуром**, если

- α гомологичен тривиальному пути, то есть разбивает Γ на две части и интеграл по α равен сумме вычетов;
- точки R_+ и R_- лежат по одну сторону относительно него, точки Q^+ и Q^- лежат по разные стороны относительно него, точки P^\pm не лежат на нём;
- ориентация кривых фиксируется следующим условием:

$$\oint_{\alpha} dp_n = +2\pi. \quad (22)$$

По лемме 1 контур C_λ с правильно выбранной ориентацией почти при всех $\lambda \in \Gamma$ является C-контуром.

Лемма 4. Пусть α является C-контуром. Тогда функция

$$K(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \oint_{\alpha} \Psi_{\mu,\nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma) = \oint_{\alpha} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}), \quad (23)$$

обнуляется оператором L по переменным μ, ν . Кроме того, $K(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = 0$ при $\mu - \nu = \tilde{\mu} - \tilde{\nu}$.

Доказательство. Первое утверждение легко следует из $L\Psi_{\mu,\nu}(\gamma) \equiv 0$.

У подынтегрального дифференциала $\tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ при $\mu - \nu = \tilde{\mu} - \tilde{\nu}$ имеется только три полюса $-R_+$, R_- и либо Q^+ , либо Q^- в зависимости от знака $\tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \mu - \nu = \tilde{n} - n$. Из определений и (2) следует, что вычеты в R_+ и R_- у $\tilde{\Omega}$ равны соответственно $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, как у Ω . Поэтому вычет в третьем полюсе равен нулю. Поскольку R_+ и R_- лежат по одну сторону относительно α , и α гомологичен точке, то $\oint_{\alpha} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = 0$, что и требовалось. ■

Теорема 2 (Ненормализованная функция Грина по С-контуре). *Функция*

$$G_0(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{sgn}(\mu - \nu + \tilde{\nu} - \tilde{\mu}) K(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \quad (24)$$

удовлетворяет условию (16).

Доказательство. Пусть сначала $\mu - \nu \neq \tilde{\mu} - \tilde{\nu}$. Обозначим $\delta_m = (\mu - \nu) - (\tilde{\mu} - \tilde{\nu})$, $\delta_m \neq 0$, и $K(\mu, \nu) = K(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$. Тогда

$$\begin{aligned} 4\pi(LG_0)_{\mu,\nu} &= \operatorname{sgn}(\delta_m + 1)a_{\mu,\nu}K(\mu + 1, \nu) + \operatorname{sgn}(\delta_m - 1)b_{\mu,\nu-1}K(\mu, \nu - 1) + \\ &+ \operatorname{sgn}(\delta_m - 1)a_{\mu-1,\nu}K(\mu - 1, \nu) + \operatorname{sgn}(\delta_m - 1)b_{\mu,\nu}K(\mu, \nu + 1) - \operatorname{sgn}(\delta_m)c_{\mu,\nu}K(\mu, \nu) \end{aligned}$$

Равенство нулю правой части следует из леммы 4. Действительно, если sgn при каком-либо слагаемом обращается в нуль, то по лемме и $K = 0$. Поэтому sgn можно вынести за оператор L , то есть $4\pi LG_0 = \operatorname{sgn}(\delta_m)(LK)_{\mu,\nu} \equiv 0$.

Пусть теперь $\mu - \nu = \tilde{\mu} - \tilde{\nu}$. Из леммы 4 следует $K(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = 0$. Имеем

$$LG_0 = \frac{1}{4\pi} (a_{\mu,\nu}K(\mu + 1, \nu) + b_{\mu,\nu-1}K(\mu, \nu - 1) - a_{\mu-1,\nu}K(\mu - 1, \nu) - b_{\mu,\nu}K(\mu, \nu + 1)) \quad (25)$$

Прибавим к правой части $LK \equiv 0$, слагаемые с минусами сократятся, а с плюсами — умножатся на 2

$$LG_0 = \frac{1}{2\pi} \oint_{\alpha} a_{\mu,\nu} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu + 1, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) + b_{\mu,\nu-1} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu - 1, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}). \quad (26)$$

Данный интеграл равен сумме вычетов по гомологичности нулю С-контур α . Дифференциалы $\tilde{\Omega}(\gamma, \mu + 1, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$, $\tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu - 1, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ имеют полюса в точках R_+ , R_- , P^+ , и каждый из них может иметь полюс в Q^+ или Q^- в зависимости от $\mu + \mu - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} = n - \tilde{n}$. В точках R_+ , R_- вычеты равны $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$. Следовательно, сумма вычетов во всех остальных полюсах равна 0.

Поскольку R_{\pm} лежат по одну сторону относительно α , вместе они дают нулевой вклад. По лемме 2 вычет в точке P^+ суммы $\omega = a_{\mu,\nu} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu + 1, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) + b_{\mu,\nu-1} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu - 1, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ равен нулю, поэтому P^+ также не влияет на итоговую сумму.

Если $\mu + \mu \neq \tilde{\mu} + \tilde{\nu}$, то у ω ровно четыре полюса. Следовательно, и в четвёртом полюсе у этой суммы вычет равен нулю, что доказывает $LG_0 = 0$.

Итак, остался случай, когда $\mu = \tilde{\mu}$, $\nu = \tilde{\nu}$. Перейдём от интегралов к вычетам. По сказанному выше, полюса R_{\pm} , P^+ дают нулевой вклад. В точках Q^+ , Q^- у ω полюса

первого порядка. Поскольку они лежат по разные стороны относительно α , в результат нужно включить любой из них. Из ориентации контура (22) множитель для вычета в Q^+ равен $-2\pi i$. Используя лемму 3, получим

$$LG_0 = -i \operatorname{res}_{Q^+} \omega = -i \operatorname{res}_{Q^+} a_{\mu, \nu} \tilde{\Omega}(\mu + 1, \nu, \mu, \nu) = -i^2 = 1. \quad (27)$$

Мы получили, что G_0 удовлетворяет (16), это и требовалось. \blacksquare

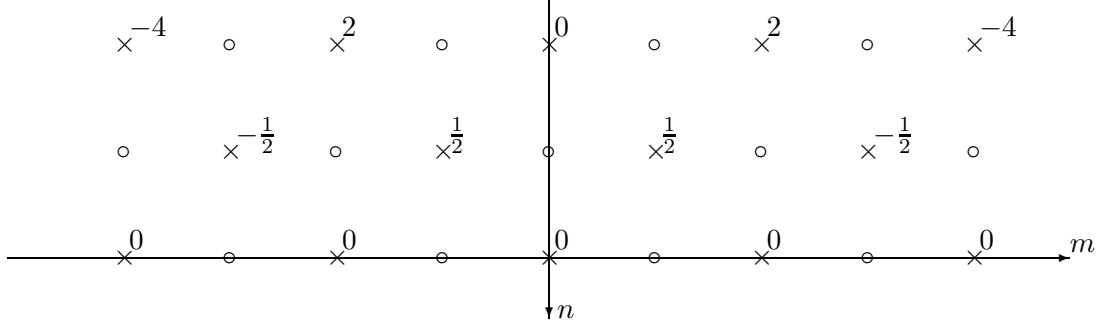


Рис. 1: Значения $G_0(m, n, 0, 0)$ в случае сферы.

Пример 3. В случае сферы из предыдущих примеров в качестве S -контура можно взять малую окружность O_ε центром в $Q^+ = i$ с ориентацией по часовой стрелке. Для краткости будем использовать обозначения $m = \mu - \nu$, $\nu = \mu + \nu$, $(m + n)$ четное. Функция G_0 имеет вид

$$G_0(m, n, \tilde{m}, \tilde{n}) = \frac{1}{4\pi} \int_{O_\varepsilon} \operatorname{sgn}(m - \tilde{m}) \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{m-\tilde{m}} \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^{n-\tilde{n}} \left(-\frac{dz}{2z} \right).$$

Предположим, что $\tilde{m} = \tilde{n} = 0$. Из ориентации O_ε вычет в точке i входит в правую часть со знаком минус:

$$G_0(m, n, 0, 0) = \frac{i}{2} \operatorname{sgn}(m) \operatorname{res}_{z=i} \left[\left(\frac{z+1}{z-1} \right)^m \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^n \frac{dz}{2z} \right].$$

Очевидно, что $G_0(m, n, 0, 0) = 0$ при $n \geq 0$. Прямым вычислением получается

$$G_0(m, -1, 0, 0) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(m) (-i)^{m+1}, \quad G_0(m, -2, 0, 0) = -\operatorname{sgn}(m) m (-i)^m.$$

Из формулы для $G_0(m, n, 0, 0)$ видно, что рост G_0 не ограничен экспонентой и условие (18) не выполняется.

4.2 Нормализованная функция Грина

Рассмотрим уже упоминавшееся семейство $C_\lambda = \{\gamma : \operatorname{Im} p_n(\gamma) = \operatorname{Im} p_n(\lambda)\}$. Как уже упоминалось, C_λ является регулярным почти при всех $\lambda \in \Gamma$. Следовательно, при $\alpha = C_\lambda$ функция G_0 из теоремы 2 удовлетворяет (16).

Рассмотрим функцию

$$Z(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_\lambda} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} p_m(\lambda) - \operatorname{Im} p_m(\gamma)) \Psi_{\mu, \nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma)$$

Поскольку путь интегрирования не зависит от дискретных параметров, $LZ = 0$. Прибавим Z к построенной G_0 . Следующая теорема утверждает, что полученная функция является искомой. Чтобы не загромождать выкладки, мы формулируем ее с использованием обеих координатных систем μ, ν и $m = \mu - \nu, n = \mu + \nu$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда функция

$$G(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_\lambda} \left(\operatorname{sgn}(m - \tilde{m}) + \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} p_m(\lambda) - \operatorname{Im} p_m(\gamma)) \right) \Psi_{\mu, \nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma) \quad (28)$$

является функцией Грина оператора L и почти при всех $\lambda \in \Gamma$ для нее выполняется условие на рост (18).

Доказательство. Фиксируем λ . Как было сказано выше, $G = G_0 + Z$, где в качестве α взят контур C_λ . Поэтому G очевидным образом удовлетворяет условию (16).

Обозначим через C'_λ множество C_λ без неподвижных точек инволюции τ . Поскольку последнее имеет в C_λ меру нуль, то от замены C_λ на C'_λ интеграл (28) не изменится. Для точек C'_λ уже справедлива теорема 1. Оценим интеграл (28) стандартным способом

$$\begin{aligned} |G(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})| &\leq \frac{1}{4\pi} \oint_{C_\lambda} |\Omega(\gamma)| \times \\ &\times \sup_{\gamma \in C'_\lambda} \left| \left(\operatorname{sgn}(m - \tilde{m}) + \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} p_m(\lambda) - \operatorname{Im} p_m(\gamma)) \right) \Psi_{\mu, \nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma) \right|. \end{aligned}$$

Вспомним условия на рост волновой функции (14) и двойственной к ней (15):

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mu, \nu}(\gamma)| &\leq R(\gamma) e^{m \operatorname{Im} p_n(\gamma) + n \operatorname{Im} p_n(\gamma)}, \\ \left| \Psi_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}}^+(\gamma) \right| &\leq R(\sigma\gamma) e^{-\tilde{m} \operatorname{Im} p_m(\gamma) - \tilde{n} \operatorname{Im} p_n(\gamma)}. \end{aligned}$$

Из $\gamma \in C_\lambda$ имеем $\operatorname{Im} p_n(\gamma) = \operatorname{Im} p_n(\lambda)$. Пусть $m > \tilde{m}$, тогда нетривиален случай $\operatorname{Im} p_m(\gamma) \leq \operatorname{Im} p_m(\lambda)$, в котором $\exp((m - \tilde{m}) \operatorname{Im} p_m(\gamma)) \leq \exp((m - \tilde{m}) \operatorname{Im} p_m(\lambda))$. Пусть теперь $m < \tilde{m}$, тогда $\operatorname{Im} p_m(\gamma) \geq \operatorname{Im} p_n(\lambda)$ и это же неравенство снова выполнено.

Из проведенных рассуждений вытекает, что искомое неравенство (18) выполняется при

$$R_1(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_\lambda} |\Omega(\gamma)| \sup_{\gamma \in C'_\lambda} (2R(\gamma)R(\sigma\gamma)). \quad (29)$$

■

Выражаю большую благодарность своему научному руководителю П. Г. Гриневичу за постановку задачи и за ценные советы по поводу ее решения.

Список литературы

- [1] С. В. Манаков, *Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения*, — УМН, 31 вып.5 (1976), 245-246.
- [2] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков *Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности* — доклад АН СССР, 229(1976), 15-18.
- [3] А. П. Веселов, С. П. Новиков *Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения* — доклад АН СССР, 279:1(1984), 20-24. *Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы* — доклад АН СССР, 279:4(1984), 784-788.
- [4] И. М. Кричевер *Двумерные периодические разностные операторы и алгебраическая геометрия* — ДАН СССР, 285:1 (1985), 31-36.
- [5] A. Doliwa, P. Grinevich, M. Nieszporski, P. M. Santini *Integrable lattices and their sublattices: from the discrete Moutard (discrete Cauchy-Riemann) 4-point equation to the self-adjoint 5-point scheme* — Journal of Mathematical Physics, 48:1 (2007), 013513
- [6] S. Grushevsky, I. Krichever *Integrable discrete Schrödinger equations and a characterization of Prym varieties by a pair of quadrisecants* — Duke Math. J. Volume 152, Number 2, 317-371 (2010).
- [7] J. Fay *Theta Functions on Riemann Surfaces* — Lecture Notes in Mathematics, V. 352, Springer-Verlag (1973).
- [8] И. М. Кричевер, С. П. Новиков *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов* — Функциональный анализ и его приложения, 21:2 (1987), 46-63.
- [9] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков *Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия* — М., Успехи Математических Наук, 31:1(187) (1976), 55-136.
- [10] П. Г. Гриневич *Быстроубывающие потенциалы на фоне конечнозонных и - проблема на римановых поверхностях* — Функци. анализ и его прил., 23:4 (1989), 79-80.